

Dodatna nastava iz matematike za drugi razred

Revizija prvog razreda

Predavač: Aleksandar Pejčev

1. Da se nadje maksimalna vrednost izraza

$$\sin^2 \alpha_1 + \dots + \sin^2 \alpha_n$$

uz uslove $0 \leq \alpha_i \leq \pi$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi$.

2. Ako su prirodni brojevi a_1, \dots, a_n takvi da a_i deli $2^{a_{i+1}} - 1$ za svako i (gde je $a_{n+1} \equiv a_1$), dokazati da su svi jednaki 1.

3. Neka su x_1, \dots, x_n pozitivni brojevi. Pokazati nejednakost

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{x_i^2 + x_{i+1}x_{i+2}} \leq n - 1,$$

gde je $x_{n+1} \equiv x_1$ i $x_{n+2} \equiv x_2$.

4. Dokazati da postoje tačno dve vrednosti n za koje postoje prirodni brojevi x_1, \dots, x_n takvi da je

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{4}{4n+1} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 1.$$

5. Niz a_n prirodnih brojeva zadovoljava $a_1 = 2, a_2 = 7$, i $-\frac{1}{2} < a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \leq \frac{1}{2}$ za $n \geq 2$.
Dokazati da su svi članovi tog niza neparni.

6. Odrediti sve nenula polinome $P \in R[x]$ za koje važi:

(a) $P(x^2) = (P(x))^2$;

(b) isti tekst uz uslov $P(x^2 - 2x) = (P(x - 2))^2$;

za svako realno x .

7. Odrediti sve funkcije $R \rightarrow R$ takve da

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$$

za sve realne x i y .

8. Dat je tetivni četvorougao $ABCD$. U trouglove BCD, ACD, ABD, ABC su upisani krugovi čiji su poluprečnici r_1, r_2, r_3, r_4 . Dokazati da je $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$.

9. Dokazati da zbir poluprečnika krugova upisanih u trouglove dobijene proizvoljnom trijagulacijom tetivnog n -tougla ne zavisi od trijagulacije.

10. Može li zbir kvadrata dva uzajamno prosta prirodna broja biti deljiv prostim brojem oblika $4k - 1$?

11. U ravni su dati krug c , prava l koja dodiruje c i tačka M na l . Naći skup svih tačaka P koje zadovoljavaju sledeći uslov: postoje dve tačke Q i R na l , takve da je M središte duži QR i da je c upisani krug trougla PQR .

12. Drvo je planaran graf bez ciklusa.

(a) Dokazati da je u svakom drvetu $T - I = 1$;

(b) Dokazati da za svaki planaran graf važi $P + T - I = 2$ gde je p broj oblasti na koje taj graf razlaže ravan.